unes sessions de preparació (dimarts i dijous de 6 a 8 a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC), dóna suport a d'altres grups de professorat que també han realitzat sessions especials de treball amb alumnes (a l'IES Lluís de Peguera a Manresa, o a l'IES Vicens Vives de Girona, o a l'IES Màrius Torres de Lleida, o a l'IES Manuel de Blancafort de la Garriga, o a l'IES Martí Franquès de Tarragona) i edita una publicació, *Sessions de preparació per a l'Olimpíada Matemàtica.* En cas que us interessi rebre'n algun exemplar podeu posar-vos en contacte amb la secretària-administrativa de la SCM.

Ànims... i a participar!!!

Antoni Gomà,
Secretari de la SCM
(IES Joanot Martorell. Esplugues)

Problemes

Problemes proposats

A30. (Proposat per Anton Montes de la UPC.) Volem organitzar una lliga de futbol entre m equips, de manera que cada equip jugui contra tots els altres. A continuació volem agrupar els partits en jornades, de tal manera que en cada jornada juguin tots els equips un únic partit (si m és imparell, un equip descansa). Doneu un algorisme per aconseguir-ho.

A31. (International Mathematics Tournament of Towns.) Una màquina dóna canvi de cinc duros en duros. Passa, però, que està espatllada i quan introduïm un duro, ens dóna 5 monedes de cinc duros. En Pere té un duro. Pot, d'alguna manera, usar la màquina fins acabar tenint el mateix nombre de monedes de les dues classes?

A32. (*Un conte embolicat*, per Lewis Carroll.) Dos viatgers surten de caça a les 3 de la tarda i tornen a les 9 del vespre després de recórrer un tros pla, pujar una muntanyeta i desfer aquest mateix camí per tornar. En el tros pla han caminat a una velocitat de 4 km/h i en pujar i baixar la muntanya, a 3 km/h i 6 km/h respectivament. Trobeu la distància recorreguda i, amb un error de menys de 1/2 hora, calculeu l'hora en què arriben al cim de la muntanyeta.

Problemes de la XXXIV Olimpíada Matemàtica Espanyola. Fase nacional.
Tarazona, 13 i 14 de març de 1998.

Primera sessió.

Problema 1. Un quadrat $ABCD$ de centre O i costat ℓ gira un angle α al voltant d'O. Trobeu l'àrea comuna a tots dos quadrats.

Problema 2. Trobeu tots els nombres naturals de 4 xifres en base 10 que siguin iguals al cub de la suma de les seves xifres.

Problema 3. Considerem el triangle ABC i la seva circumferència circumscrita. Si D i F són punts sobre el costat BC tals que AD i AE són, respectivament, paral·lels a les tangents en C i en B a la circumferència circumscrita, demostreu que

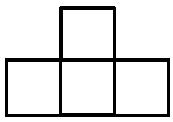
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Segona sessió.

Problema 4. Trobeu les tangents dels angles d'un triangle sabent que són enters positius.

Problema 5. Trobeu totes les funcions $f : N \longrightarrow N$ estrictament creixents i tals que $f(n + f(n)) = 2f(n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Problema 6. Determineu els valors de n pels quals és possible construir un quadrat $n \times n$ acoblant peces del tipus



Solucions

Problemes proposats a SCM/Notícies 7

A26. Sigui n un enter positiu donat i considerem $f(x) = x^n$ on $x = 1, 2, 3, \ldots$ Els dígits de $f(1), f(2), \ldots$ es col·loquen uns a continuació dels altres per a formar un decimal infinit que anomenem y_n:

$$y_n = 0.\langle f(1)\rangle\langle f(2)\rangle\langle f(3)\rangle \ldots$$

Per exemple,

$$y_2 = 0.1491625364964\ldots$$

Quins valors de n fan que y_n sigui racional?

Solució: (Anna Pol. IES Jaume Vicens Vives. Girona).

Per cap valor de n. En qualsevol y_n hi trobarem com a xifres decimals els dígits de

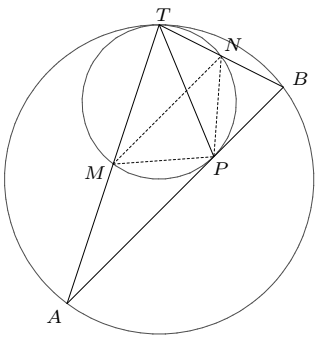
$$f(10^k) = 1\underbrace{00\ldots0}_{kn \text{ zeros}}, \quad \text{per a tot } k.$$

És evident que un racional no pot contenir tirallongues de zeros arbitràriament llargues amb un 1 davant.

Altres idees: Esteve Cases Juncà de Barcelona també ha donat la solució.

A27. Dues circumferències són tangents internament a T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior tangent a la circumferència interior a P. Demostreu que TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{ATB}$.

Solució: (Paco Alejandre. IES Martí Franqués. Tarragona).



Siguin M i N els punts de tall dels segments TA i TB, respectivament, amb la circumferència interior. L'homotècia de centre T que transforma M en A també transforma N en B, d'on MN és paral·lela a AB. Ara tenim:

$\widehat{ATP} = \widehat{MPA}$ per abraçar el mateix arc $\overset{\frown}{MP}$ en la circumferència interior.

$\widehat{MPA} = \widehat{NMP}$ per a alterns–interns.

$\widehat{NMP} = \widehat{NTP}$ per abraçar el mateix arc $\overset{\frown}{PN}$ en la circumferència interior.

De tot això, $\widehat{ATP} = \widehat{NTP}$ i TP és doncs la bisectriu de l'angle $\widehat{ATB}$.

Altres idees: Anna Pol i Esteve Cases també han aportat la solució.

A28. Proveu que per a qualssevol m, n enters positius, existeixen $r, (r \geq 3)$ nombres enters positius $m < a_1 < a_2 \cdots < a_r$ tals que

$$n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_r}.$$

Solució: (Jaume Paradís, UPF). Sigui H_j el j èsim nombre harmònic:

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}.$$

és fàcil veure que H_j no és mai enter per a cap valor de j. Si es vol, es poden mirar els H_j com les sumes parcials de la sèrie harmònica $\sum_i 1/i$ que és divergent. Siguin n i m els nombres del problema. Considerem ara el nombre $n + H_m$. Existirà un $k > m$ tal que $H_k < n + H_m < H_{k+1}$. Simplificant H_m de cada costat ens queda:

$$n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{k} + \alpha, \qquad (\star)$$

amb α racional i menor que $1/(k+1)$. És immediat veure que per a $n > 1$ i $m \geq 1$ el nombre de sumands a la dreta de $(\star)$ és superior a 3. El cas $n = 1$ i $m = 1$ té la solució immediata $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$. Ara només queda veure que α es pot posar com una suma de les demanades amb $a_1 \geq k + 1$. Això es pot veure de vàries maneres. Una de molt interessant és la següent. Si $0 < p/q < 1/(k+1)$, p/q es pot expressar de la forma

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_r}$$

amb $k + 1 < b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_r$. N'hi ha prou amb seguir el següent algorisme:

$q = p \cdot b_1 - r_1 (0 \leq r_1 < p)$ on
b_1 és el quocient per excés i
r_1 el residu per excés

Així

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1} \cdot \frac{r_1}{q}.$$

Òbviament $b_1 > k + 1$. Tornem a aplicar l'algorisme a r_1/q i obtenim b_2 i així successivament fins a arribar a $r_1 = 0$ que ens proporciona b_r. (El desenvolupament d'un nombre real d'aquesta manera s'anomena expansió en sèrie d'Engel).

Altres idees: L'Anna Pol i l'Esteve Cases, a més de l'Edgar Gneto, que va proposar el problema, han aportat solucions.

A29. Si n és un enter positiu, definim

$$r(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

on $[x]$ denota la part entera de x. Trobeu els n pels quals $r(n) + 1 = r(n + 1)$.

Solució: (Esteve Cases de Barcelona).

Si $r(n) + 1 = r(n + 1)$ llavors s'ha de verificar:

$$\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n}{3}\right]\right) + \cdots + \left(\left[\frac{n+1}{n}\right] - \left[\frac{n}{n}\right]\right) + = 0.$$

Cada un dels sumands anteriors és més gran o igual que 0, per tant, la suma només pot ser 0 si tots són 0. Però és immediat de veure que

$$\left([fracn + 1m] - \left[\frac{n}{m}\right]\right) = 1 \Leftrightarrow n + 1 = \dot{m}.$$

En conseqüencia, per a $m = 2, \ldots, n$ s'ha de complir $n + 1 \neq \dot{m}$, o sigui que $n + 1$ ha de ser primer.

Altres idees: L'Anna Pol, a més de l'Edgar Gneto, que va proposar el problema, ha aportat la solució.

Pelegrí Viader
Universitat Pompeu Fabra

Tesis

- M. Rosa Massa Esteve va llegir la seva tesi, dirigida per Antoni Malet i tutorada per Albert Dou, titulada *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*, el dia 26 de juny de 1998. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

L'obra del matemàtic bolonyès Pietro Mengoli, deixeble de Cavalieri (1598-1647), ha estat poc estudiada. Els pocs estudis fets de les matemàtiques de Mengoli són merament descriptius, no donen tots els resultats, alguns els donen molt simplificats, en notació actual, i sense analitzar el procés de desenvolupament ni el pensament global de l'autor. La present tesi tracta una part significativa de la seva obra matemàtica amb dos objectius principals: d'una banda, aporta a la història de les matemàtiques un coneixement més profund dels conceptes matemàtics que Mengoli va utilitzar i, de l'altra, estudia el procés d'articulació de l'àlgebra amb la geometria que té lloc el segle disset des de la perspectiva de les seves contribucions.

Pel que fa al primer objectiu, la tesi mostra que Mengoli fa un recorregut molt extens per diferents camps matemàtics, però els seus resultats, encara que a diferents obres, queden tots lligats per la idea global de calcular quadratures de les formes $y^p = kx^n(1 - x)^m$ i, en particular, la quadratura del cercle. Hi podem trobar molts resultats importants que no havien estat assenyalats a les investigacions anteriors, com ara la construcció dels sumatoris, les taules triangulars de sumatoris, la demostració i obtenció de la regla per trobar la suma de potències, la idea de variable totalment explicitada per Mengoli, els càlculs de les quasi proporcions, els càlculs amb l'infinitament gran i l'infinitament petit, la construcció de les taules de quadratures, les quadratures d'expressions amb exponents racionals, els càlculs de les fitacions amb productes infinits i la computació del nombre π.

Pel que fa al segon objectiu, aclarir la conjunció de l'àlgebra i la geometria dins les matemàtiques de Mengoli, la tesi mostra que utilitza les lletres i els símbols per construir els sumatoris, les taules triangulars, les quasi proporcions i les figures que vol quadrar. Les lletres